Semaine du 27/01 au 01/02.

1 Matrices

1.1 Produit matriciel

➻ Écriture $Y = AX$. Lien avec le morphisme canoniquement associé.
➻ Image et noyau d'une matrice A. Isomorphisme avec le noyau et l'image de toute application linéaire f représenté par A.
➻ Produit par blocs.

1.2 L'algèbre des matrices carrées

➻ $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non-commutative et non-intègre dès que $n \geqslant 2$.
➻ Isomorphisme d'algèbre entre $L(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
➻ Rappel : Binôme de Newton et formule de Bernoulli pour deux matrices qui commutent.
➻ Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: c'est la droite vectorielle $\mathbb{K}I_n$.
➻ Trace d'une matrice. C'est une forme linéaire.
➻ Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, on a $Tr(A^T) = Tr(A)$ et $Tr(AB) = Tr(BA)$.
➻ Matrices remarquables : matrices scalaires, matrices diagonales et matrices triangulaires. Structure des ensembles correspondants, dimension et bases canoniques.
➻ Multiplications de matrices « diagonales par blocs » ou de matrices « triangulaires par blocs ».
➻ Matrices symétriques et antisymétriques. Les ensembles correspondants sont des supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
➻ Pour les matrices diagonales par blocs (2 blocs), lien avec l'existence de deux sev supplémentaires stables.

1.3 Le groupe des matrices inversibles

➻ Définition d'une matrice inversible. Notation $GL_n(\mathbb{K})$.
➻ Interprétation en termes d'applications linéaires
➻ $(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe isomorphe (pour les groupes !) au groupe $(GL(E), \circ)$.
➻ Une famille de n vecteur de E de dimension n est une base ssi sa matrice est inversible.
➻ Caractérisation de l'inversibilité à l'aide du noyau ou de l'image.
➻ Inversible $\Leftrightarrow$ Inversible à droite $\Leftrightarrow$ Inversible à gauche.
➻ Inverse d'un produit. Inverse d'une transposée.
➻ CNS d'inversibilité d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire.
➻ L'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire du même type.
➻ Algorithme d'inversion d'une matrice (<u>Admis</u> pour le moment).

1.4 Changement de base

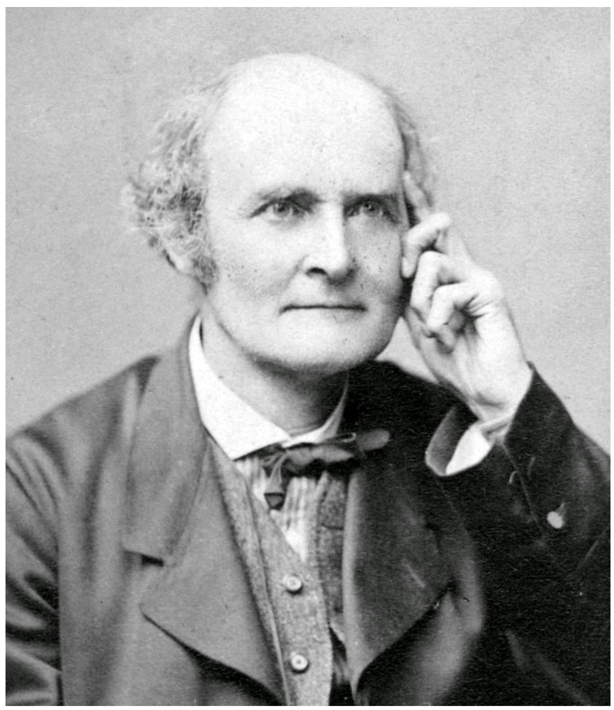
➻ Matrice de passage : la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, notée $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ est $Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(Id_E)$.
➻ On a $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \left(\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1}$.
➻ Changement de coordonnées. Changement de base pour une application linéaire.
➻ Matrices semblables. C'est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
➻ Deux matrices sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme dans des bases « différentes ».
➻ Puissance de matrices semblables
➻ Trace d'un endomorphisme. Propriétés. Trace d'un projecteur.

1.5 Rang d'une matrice

- Définition.
- Lien avec le rang d'une famille de vecteurs.
- Lien avec le rang d'une application linéaire représentée par la matrice.
- Deux matrices semblables ont le même rang.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A inversible ssi $rg(A) = n$.
- La rang d'une matrice est inchangé par produit à droite ou à gauche par une matrice inversible.
- Algorithme pour déterminer le rang d'une matrice (Admis pour le moment).

2 Prévisions

- Fin du chapitre
- Dérivation



Arthur Cayley (1821 - 1895)

En 1854, Arthur Cayley publie un traité sur les transformations géométriques utilisant les matrices de façon beaucoup plus générale que tout ce qui a été fait avant lui. Il définit les opérations usuelles du calcul matriciel (addition, multiplication et division) et montre les propriétés d'associativité et de distributivité de la multiplication